Sur l'unimodularité de $\mathsf{GL}_2(\mathbb{Q}_\mathsf{p})$ et de ses sous-groupes classiques

14 janvier 2026

Jérémy ALPACCA

Résumé

Dans cette première présentation, on va se concentrer sur l'étude du groupe $\mathsf{GL}_2(\mathbb{Q}_\mathsf{p})$, de ses sous-groupes classiques, ainsi que de leur unimodularité. À terme, l'un des objectifs (qui ne sera pas atteint ici) est d'établir le théorème de classification des classes d'isomorphisme des représentations irréductibles non cuspidales de $\mathsf{GL}_2(\mathbb{Q}_\mathsf{p})$. Pour cela, il est nécessaire de mettre en lumière quelques décompositions matricielles usuelles et d'introduire le caractère modulaire. On va donc découper cet exposé en trois sections. La première section regroupe les principaux résultats concernant les intégrales de Haar et le caractère modulaire. La deuxième section se focalise sur les décompositions matricielles classiques. Enfin, la dernière section étudie l'unimodularité de $\mathsf{GL}_2(\mathbb{Q}_\mathsf{p})$ et de ses principaux sous-groupes.

Table des matières

1 Intégrales de Haar **1**
- 1.1 Brefs rappels sur les groupes localement profinis . . . 1
- 1.2 Intégrales de Haar . . . 1
  - 1.2.1 Définitions et premières propriétés . . . 1
  - 1.2.2 Caractère modulaire . . . 2
  - 1.2.3 Groupe unimodulaire . . . 3

2 Décompositions matricielles usuelles **3**
- 2.1 Décomposition en produit semi-direct du sous-groupe de Borel B . . . 4
- 2.2 Décomposition de Bruhat . . . 4
- 2.3 Décomposition d'Iwasawa . . . 4
- 2.4 Décomposition de Cartan . . . 5

3 Étude de l'unimodularité de G et de ses sous-groupes classiques **7**
- 3.1 Mesure de Haar sur $\mathbb{Q}_\mathsf{p}^\times$ . . . 7
- 3.2 Unimodularité de G . . . 8
- 3.3 Examen de l'unimodularité de B, N, T et Z . . . 10

Le présent fichier est largement inspiré de [BH]. Ce travail n'aurait pu être réalisé en si peu de temps sans les suggestions bienveillantes de quelques collègues. Qu'ils en soient remerciés !

Ici, p désignera toujours un nombre premier. Si $x \in \mathbb{Q}_p$, alors on note $v_p(x)$ sa valuation p-adique et $|x|_p$ sa valeur absolue p-adique.

1 Intégrales de Haar

1.1 Brefs rappels sur les groupes localement profinis

Définition 1.1.1. Un **groupe localement profini** est un groupe topologique G tel que tout voisinage ouvert de 1_G dans G contient un sous-groupe compact ouvert de G.

Il existe de nombreux exemples abstraits et concrets de groupes localement profinis. En voici une liste.

Exemple 1.1.2. Tout groupe discret est localement profini (car le sous-groupe trivial est ouvert, compact et contenu dans tout voisinage ouvert de l'élément neutre).

Exemple 1.1.3. Tout sous-groupe fermé d'un groupe localement profini est localement profini.

Exemple 1.1.4. Le quotient d'un groupe localement profini par un sous-groupe distingué fermé est un groupe localement profini.

Exemple 1.1.5. Le groupe additif $\mathbb{Q}_p$ est localement profini (car les $p^n\mathbb{Z}_p$, $n \in \mathbb{Z}$, forment une base de voisinages de 0 dans $\mathbb{Q}_p$ qui sont de plus ouverts et compacts).

Exemple 1.1.6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le groupe additif $\mathbb{Q}_p^n$ est localement profini. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le groupe additif $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q}_p)$ est localement profini.

Exemple 1.1.7. Soit n un entier naturel non nul. Le groupe multiplicatif $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ est localement profini (car les $I_n + p^k\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_p)$, $k \in \mathbb{N}^*$, forment une base de voisinages de I_n dans $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ qui sont de plus ouverts et compacts).

Notation 1.1.8. Si G est un groupe localement profini, alors on note $C_c^\infty(G)$ l'espace des fonctions de G vers $\mathbb{C}$ qui sont localement constantes et à support compact.

1.2 Intégrales de Haar

1.2.1 Définitions et premières propriétés

Notations 1.2.1. Si G désigne un groupe localement profini, alors pour tous $g \in G$, $f \in C_c^\infty(G)$ et $x \in G$, on pose

$$\lambda_g f(x) = f(g^{-1}x) \quad \text{et} \quad \rho_g f(x) = f(xg).$$

Les applications λ et ρ sont respectivement appelées **translation à gauche** et **translation à droite** de G.

Définition 1.2.2. Soit G un groupe localement profini. Une **intégrale de Haar à droite** de G est une forme linéaire non nulle I sur $C_c^\infty(G)$ telle que :

❶ $\forall g \in G, \forall f \in C_c^\infty(G), I(\rho_g f) = I(f)$; ❷ $\forall f \in C_c^\infty(G), (f \geqslant 0 \Rightarrow I(f) \geqslant 0)$.

Remarque 1.2.3. Parfois, une forme linéaire non nulle sera désignée sous le nom de **fonctionnelle**.

Remarque 1.2.4. On peut similairement définir la notion d'**intégrale de Haar à gauche** de G en utilisant dans le point ❶ de la définition précédente la translation à gauche au lieu de la translation à droite.

Proposition 1.2.5. Soit G un groupe localement profini. Alors il existe une intégrale de Haar I à droite de G.

De plus, une forme linéaire I' non nulle sur $C_c^\infty(G)$ est une intégrale de Haar à droite de G si et seulement s'il existe $c > 0$ tel que $I' = cI$.

Démonstration. Admise. ❑

Remarque 1.2.6. Bien sûr, la proposition précédente est valable pour les intégrales de Haar à gauche de G.

1.2.2 Caractère modulaire

Soient G un groupe localement profini puis μ_G une mesure de Haar à gauche de G et $g \in G$. Considérons les fonctionnelles

$$\begin{array}{rccc} I : & C_c^\infty(G) & \to & \mathbb{C} \\ & f & \mapsto & \displaystyle\int_G f(x)\, d\mu_G(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} I_g : & C_c^\infty(G) & \to & \mathbb{C} \\ & f & \mapsto & \displaystyle\int_G f(xg)\, d\mu_G(x) \end{array}.$$

Vérifions que I est une intégrale de Haar à gauche de G.

• Soient $\gamma \in G$ et $f \in C_c^\infty(G)$. En posant $x' = \gamma^{-1}x$ de sorte que $x = \gamma x'$ et $d\mu_G(x) = d\mu_G(x')$, on a

$$I(\lambda_\gamma f) = \int_G f(\gamma^{-1}x)\, d\mu_G(x) = \int_G f(x')\, d\mu_G(x') = I(f).$$

• Si $f \in C_c^\infty(G)$ telle que $f \geqslant 0$, alors par positivité de l'intégrale, $I(f) \geqslant 0$.

Ceci montre que I est une intégrale de Haar à gauche de G. De même, on montre que I_g est une intégrale de Haar à gauche de G. D'après la proposition 1.2.5, il existe un seul et unique réel strictement positif $\delta_G(g)$ tel que pour tout $f \in C_c^\infty(G)$, $I(f) = \delta_G(g)\, I_g(f)$ ou encore

$$\delta_G(g) \int_G f(xg)\, d\mu_G(x) = \int_G f(x)\, d\mu_G(x). \qquad (\blacklozenge)$$

L'application δ_G qui à un élément g de G associe $\delta_G(g)$ est un morphisme de groupes de G vers $\mathbb{R}_+^\times$. En effet, soient g et g' deux éléments de G puis $f \in C_c^\infty(G)$. D'une part

$$\delta_G(gg') \int_G f(xgg')\, d\mu_G(x) = \int_G f(x)\, d\mu_G(x).$$

D'autre part, $\rho_{g'}f$ appartient à $C_c^\infty(G)$ et donc l'égalité $(\blacklozenge)$ appliquée à $\rho_{g'}f$ fournit

$$\delta_G(g) \int_G f(xgg')\, d\mu_G(x) = \delta_G(g) \int_G \rho_{g'}f(xg)\, d\mu_G(x) = \int_G \rho_{g'}f(x)\, d\mu_G(x) = \int_G f(xg')\, d\mu_G(x).$$

Or, toujours d'après l'égalité $(\blacklozenge)$, appliquée cette fois à g', il vient

$$\delta_G(g') \int_G f(xg')\, d\mu_G(x) = \int_G f(x)\, d\mu_G(x).$$

Il s'ensuit alors

$$\delta_G(g)\, \delta_G(g') \int_G f(xgg')\, d\mu_G(x) = \int_G f(x)\, d\mu_G(x).$$

Par unicité, on en déduit que $\delta_G(gg') = \delta_G(g)\, \delta_G(g')$.

Tout ce travail conduit à la définition suivante.

Définition 1.2.7. Soit G un groupe localement profini. Le morphisme de groupes δ_G issu de l'égalité $(\blacklozenge)$ s'appelle le **caractère modulaire** de G.

Remarque 1.2.8. Si K est un sous-groupe compact ouvert de G, alors pour tout $k \in K$, $\delta_G(k) = 1$. En effet, soient μ_G une mesure de Haar à gauche de G et $k \in K$. La fonction $\mathbb{1}_K$ appartient à $C_c^\infty(G)$ et donc l'égalité $(\blacklozenge)$ s'écrit

$$\delta_G(k) \int_G \mathbb{1}_K(xk)\, d\mu_G(x) = \int_G \mathbb{1}_K(x)\, d\mu_G(x)$$

ou encore

$$\delta_G(k)\, \mu_G(Kk^{-1}) = \mu_G(K).$$

Mais comme K est un sous-groupe de G et $k \in K$, on a $Kk^{-1} = K$ et donc

$$\delta_G(k)\, \mu_G(K) = \mu_G(K).$$

En tenant compte du fait que K est compact et ouvert dans G, il vient $\mu_G(K) > 0$, ce qui permet d'affirmer que $\delta_G(k) = 1$.

1.2.3 Groupe unimodulaire

Définition 1.2.9. Soit G un groupe localement profini.

On dit que G est **unimodulaire** si toute intégrale de Haar à gauche de G est une intégrale de Haar à droite de G.

Proposition 1.2.10. Soit G un groupe localement profini.

Le groupe G est unimodulaire si et seulement s'il existe une intégrale de Haar à gauche de G qui est une intégrale de Haar à droite de G.

Démonstration. L'implication directe est triviale. Réciproquement, s'il existe une intégrale de Haar à gauche I de G qui est une intégrale de Haar à droite de G, alors d'après la proposition 1.2.5 et la remarque 1.2.6, toute intégrale de Haar à gauche de G est de la forme cI où $c > 0$, et est donc une intégrale de Haar à droite de G. Ainsi, G est unimodulaire. ❑

Proposition 1.2.11. Soit G un groupe localement profini.

Le groupe G est unimodulaire si et seulement si son caractère modulaire est trivial.

Démonstration. Supposons que le groupe G est unimodulaire. Fixons g un élément de G. Alors l'égalité (♦) fournit pour tout $f \in C_c^\infty(G)$,

$$\int_G f(x)\,d\mu_G(x) = \delta_G(g)\int_G f(xg)\,d\mu_G(x) = \delta_G(g)\int_G f(x)\,d\mu_G(x)$$

ce qui entraîne que $\delta_G(g) = 1$.

Réciproquement, si δ_G est trivial, alors pour tous $g \in G$ et $f \in C_c^\infty(G)$, l'égalité (♦) s'écrit

$$\int_G f(xg)\,d\mu_G(x) = \int_G f(x)\,d\mu_G(x)$$

et on conclut en appliquant la proposition 1.2.10. ❑

Voici deux familles importantes de groupes unimodulaires.

Exemple 1.2.12. Si G est abélien, alors G est unimodulaire. En effet, soient μ_G une mesure de Haar à gauche de G et $g \in G$. Pour tout $f \in C_c^\infty(G)$, en posant $x' = gx$, il vient

$$\int_G f(xg)\,d\mu_G(x) = \int_G f(gx)\,d\mu_G(x) = \int_G f(x')\,d\mu_G(x').$$

En tenant compte de (♦), ceci impose que $\delta_G(g) = 1$. La proposition 1.2.11 prouve que G est unimodulaire.

Exemple 1.2.13. Si G est compact et ouvert, alors la remarque 1.2.8 et la proposition 1.2.11 entraînent que G est unimodulaire.

2 Décompositions matricielles usuelles

Le groupe localement profini $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ (voir l'exemple 1.1.7) est celui qui va servir de cadre pour cette présentation. Tout ce qui va suivre est en réalité valable pour $GL_2(F)$ où F est un corps local non archimédien (consulter [BH] pour voir la forme des énoncés et des démonstrations dans ce cas général).

À partir de maintenant, voici quelques notations qui seront utilisées. On pose $A = \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}_p)$ puis on note G (respectivement K) le groupe $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ (respectivement $GL_2(\mathbb{Z}_p)$). On introduit également les notations suivantes pour les sous-groupes classiques de G.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in A \;\middle|\; c = 0 \right\} \cap G \text{ (sous-groupe de Borel standard de } G).$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{Q}_p \right\} \simeq \mathbb{Q}_p \text{ (radical unipotent de } G).$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{Q}_p^\times \text{ et } b \in \mathbb{Q}_p^\times \right\} \simeq \mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times \text{ (tore standard maximal de } G).$$

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{Q}_p^\times \right\} \simeq \mathbb{Q}_p^\times \text{ (centre de } G).$$

En vertu des exemples 1.1.3, 1.1.5 et 1.1.7, tous ces groupes sont localement profinis.

Enfin, si H désigne un groupe topologique localement compact, alors on note μ_H la mesure de Haar (à gauche) sur H.

2.1 Décomposition en produit semi-direct du sous-groupe de Borel B

Proposition 2.1.1. $B \simeq N \rtimes T$.

Démonstration. Immédiatement, $N \trianglelefteq B$, $B = NT$ et $N \cap T = \{I_2\}$, ce qui démontre le résultat. ❑

Remarque 2.1.2. Cette décomposition interviendra lors de l'étude de l'unimodularité du sous-groupe de Borel B.

2.2 Décomposition de Bruhat

Proposition 2.2.1 (décomposition de Bruhat). Posons $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$G = B \cup BwB.$$

Démonstration. Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$. On distingue deux cas de figure.

1er cas. Si $c = 0$, alors $g \in B$ et c'est terminé.

2ème cas. Supposons que $c \neq 0$. Posons $b_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in B$. Alors $b_1 g = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b - \frac{ad}{c} \\ c & d \end{pmatrix}$.

Pour faire apparaître un coefficient égal à 1 à la ligne 2 colonne 1, on considère la matrice $b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \in B$. On a alors

$$b_2 b_1 g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b - \frac{ad}{c} \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b - \frac{ad}{c} \\ 1 & \frac{d}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - \frac{ad}{c} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$g = \underbrace{b_1^{-1} b_2^{-1} \begin{pmatrix} b - \frac{ad}{c} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in B} w \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in B} \in BwB$$

et la démonstration est achevée. ❑

Corollaire 2.2.2. Les matrices I_2 et $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ forment un système de représentants des doubles classes de $B\backslash G/B$.

Démonstration. Montrons que l'union $B \cup BwB$ est disjointe. Supposons par l'absurde que $B \cap BwB \neq \varnothing$. Alors il existe un élément $g = (g_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2}$ de G appartenant à B et à BwB.

D'une part, la condition $g \in B$ fournit $g_{2,1} = 0$. D'autre part, le fait que $g \in BwB$ montre qu'il existe $b = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} \in B$ et $b' = (b'_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} \in B$ tels que $g = bwb'$. On a

$$bwb' = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ 0 & b_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b'_{1,1} & b'_{1,2} \\ 0 & b'_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,2} & b_{1,1} \\ b_{2,2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b'_{1,1} & b'_{1,2} \\ 0 & b'_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ b_{2,2} b'_{1,1} & * \end{pmatrix}$$

et donc $g_{2,1} = b_{2,2} b'_{1,1} \neq 0$ (car sinon $b \notin G$ ou $b' \notin G$), ce qui est absurde. Ceci montre que $B \cap BwB = \varnothing$. ❑

2.3 Décomposition d'Iwasawa

Proposition 2.3.1 (décomposition d'Iwasawa). Tout élément g de G s'écrit sous la forme $g = bk$ où $b \in B$ et $k \in K$.

Démonstration. Soit $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G$. Nécessairement, $\gamma \neq 0$ ou $\delta \neq 0$. On distingue trois cas de figure.

1er cas. Si $\gamma = 0$, alors $\delta \neq 0$. Donc $b = g \in B$ et $k = I_2 \in K$ conviennent.

2ème cas. Supposons que $\delta = 0$. Alors $\gamma \neq 0$. En posant $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in K$, on a

$$gw = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}}_{= b \in B}$$

puis $g = bk$ avec $k = w^{-1} \in K$.

3ème cas. Supposons que $\gamma \neq 0$ et $\delta \neq 0$.

1er sous-cas. Supposons que $v_p(\gamma) \geqslant v_p(\delta)$. Alors $v_p\left(-\frac{\gamma}{\delta}\right) = v_p(\gamma) - v_p(\delta) \geqslant 0$ et donc $-\frac{\gamma}{\delta} \in \mathbb{Z}_p$. On pose alors $w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\gamma}{\delta} & 1 \end{pmatrix} \in K$. Il vient

$$gw_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\gamma}{\delta} & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha - \frac{\beta\gamma}{\delta} & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}}_{= b \in B}$$

et donc $g = bk$ avec $k = w_1^{-1} \in K$.

2ème sous-cas. Supposons que $v_p(\gamma) < v_p(\delta)$. En multipliant g à droite par w, on obtient

$$gw = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}$$

et on conclut en appliquant le sous-cas précédent. ❑

Corollaire 2.3.2. $G = BK$.

Corollaire 2.3.3. Le quotient $B\backslash G$ est compact.

Démonstration. On note π la projection canonique de G sur $B\backslash G$. Vérifions que la restriction de π à K est une surjection de K sur $B\backslash G$.

Soit $Bg \in B\backslash G$. Grâce à la décomposition d'Iwasawa, il existe $b \in B$ et $k \in K$ tels que $g = bk$. Mais alors,

$$Bg = B(bk) = Bk = \pi_{|K}(k).$$

Ceci montre que $\pi_{|K}$ est surjective. Ensuite, par définition de la topologie quotient, π est continue sur G et donc $\pi_{|K}$ est continue sur K. Comme K est compact dans G, on en déduit que $B\backslash G = \pi_{|K}(K)$ est compact. ❑

2.4 Décomposition de Cartan

Proposition 2.4.1 (décomposition de Cartan). Tout élément $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de G s'écrit sous la forme

$$g = k_1 \begin{pmatrix} p^m & 0 \\ 0 & p^n \end{pmatrix} k_2$$

où k_1 et k_2 sont dans K, m et n sont des entiers relatifs tels que $m \leqslant n$ et déterminés par les conditions

$$|\det(g)|_p = p^{-m-n} \text{ et } \mathrm{Max}\{|a|_p, |b|_p, |c|_p, |d|_p\} = p^{-m}.$$

Démonstration. Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$.

Posons $M = \mathrm{Max}\{|a|_p, |b|_p, |c|_p, |d|_p\}$. Alors il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $M = p^{-m}$. Posons $g' = \begin{pmatrix} p^{-m} & 0 \\ 0 & p^{-m} \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ de sorte que $\mathrm{Max}\{|a'|_p, |b'|_p, |c'|_p, |d'|_p\} = 1$. Comme la matrice $\begin{pmatrix} p^{-m} & 0 \\ 0 & p^{-m} \end{pmatrix}$ est scalaire, elle commute avec toutes les matrices de G. On peut donc supposer sans perte de généralité que $M = 1$.

En particulier, a, b, c et d appartiennent à $\mathbb{Z}_p$ et l'un au moins d'entre eux est dans $\mathbb{Z}_p^\times$. Quitte à multiplier g par la matrice $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in K$ à gauche et/ou à droite, on peut supposer que $a \in \mathbb{Z}_p^\times$.

Étant donné que $a \in \mathbb{Z}_p^\times$, $b \in \mathbb{Z}_p$ et $c \in \mathbb{Z}_p$, alors $-\dfrac{c}{a} \in \mathbb{Z}_p$ et $-\dfrac{b}{a} \in \mathbb{Z}_p$ et les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartiennent à K. On a donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{pmatrix}.$$

Posons $d' = d - \dfrac{bc}{a}$. Alors $\det(g) = ad - bc = ad'$ et donc $|\det(g)|_p = |d'|_p$. Ensuite, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ tels que $d' = up^n$ et donc $|\det(g)|_p = |d'|_p = p^{-n}$.

Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartiennent à K et donc

$$\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^n \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^n \end{pmatrix}$$

et donc

$$g = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{= k_1 \in K} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^n \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{= k_2 \in K}$$

ce qui termine la démonstration. ❑

Corollaire 2.4.2. Les matrices du type $\begin{pmatrix} p^m & 0 \\ 0 & p^n \end{pmatrix}$, $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ et $m \leqslant n$, forment un système de représentants des doubles classes de $K\backslash G/K$.

Démonstration. D'après la décomposition de Cartan, $G = \bigcup_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ m \leqslant n}} K \begin{pmatrix} p^m & 0 \\ 0 & p^n \end{pmatrix} K$. Il s'agit de prouver que l'union précédente est disjointe. Pour tous entiers relatifs m et n tels que $m \leqslant n$, on pose $a_{m,n} = \begin{pmatrix} p^m & 0 \\ 0 & p^n \end{pmatrix}$.

Soient m, n, m' et n' quatre entiers relatifs tels que $m \leqslant n$ et $m' \leqslant n'$ et tels que les matrices $a_{m,n}$ et $a_{m',n'}$ appartiennent à la même double classe de $K\backslash G/K$. Alors il existe $k_1 \in K$ et $k_2 \in K$ tels que $a_{m,n} = k_1 a_{m',n'} k_2$.

Déjà, $|\det(a_{m,n})|_p = p^{-m-n}$ et $|\det(a_{m',n'})|_p = p^{-m'-n'}$ et donc cela impose que $m + n = m' + n'$.

Pour tout $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, posons $N(g) = \mathrm{Max}\{|a|_p, |b|_p, |c|_p, |d|_p\}$. Ensuite, pour $a_{m,n}$, comme $m \leqslant n$, on a $N(a_{m,n}) = \mathrm{Max}\{|p^m|_p, |p^n|_p\} = p^{-m}$, mais aussi

$$N(a_{m,n}) = N(k_1 a_{m',n'} k_2) \leqslant N(a_{m',n'}) = p^{-m'}$$

ce qui entraîne que $p^{-m} \leqslant p^{-m'}$. Par symétrie des rôles de $a_{m,n}$ et $a_{m',n'}$, on a aussi $p^{-m'} \leqslant p^{-m}$. D'où $p^{-m'} = p^{-m}$ puis $m' = m$ et donc l'égalité $m' + n' = m + n$ fournit $n' = n$.

Ainsi, deux doubles classes différentes de $K\backslash G/K$ ne peuvent se rencontrer et donc $G = \biguplus_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ m \leqslant n}} K \begin{pmatrix} p^m & 0 \\ 0 & p^n \end{pmatrix} K$, ce qui prouve le corollaire. ❑

3 Étude de l'unimodularité de G et de ses sous-groupes classiques

3.1 Mesure de Haar sur $\mathbb{Q}_p^\times$

Avant d'entrer dans le vif du sujet, on commence par exhiber une mesure et une intégrale de Haar sur $\mathbb{Q}_p^\times$. Pour cela, on a besoin d'une description précise des éléments de l'espace $C_c^\infty(\mathbb{Q}_p)$.

Lemme 3.1.1. $C_c^\infty(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{Vect}(\{\mathbb{1}_{a+p^n\mathbb{Z}_p} \mid a \in \mathbb{Q}_p \text{ et } n \in \mathbb{Z}\})$.

Démonstration. Les fonctions caractéristiques $\mathbb{1}_{a+p^n\mathbb{Z}_p}$, $a \in \mathbb{Q}_p$ et $n \in \mathbb{Z}$, appartiennent clairement à $C_c^\infty(\mathbb{Q}_p)$. D'où l'inclusion $\mathrm{Vect}(\{\mathbb{1}_{a+p^n\mathbb{Z}_p} \mid a \in \mathbb{Q}_p \text{ et } n \in \mathbb{Z}\}) \subseteq C_c^\infty(\mathbb{Q}_p)$.

Réciproquement, soit $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{Q}_p)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$, il existe $n_x \in \mathbb{Z}$ tel que Φ soit constante sur $x + p^{n_x}\mathbb{Z}_p$. Par hypothèse, $\mathrm{Supp}(\Phi)$ est compact dans $\mathbb{Q}_p$ et la famille d'ouverts $(x + p^{n_x}\mathbb{Z}_p)_{x \in \mathrm{Supp}(\Phi)}$ recouvre $\mathrm{Supp}(\Phi)$. Il existe donc une sous-famille finie $(a_i + p^{n_i}\mathbb{Z}_p)_{1 \leqslant i \leqslant r}$, où $(a_1, ..., a_r) \in \mathbb{Q}_p^r$ et $(n_1, ..., n_r) \in \mathbb{Z}^r$, telle que $\mathrm{Supp}(\Phi) = \bigcup_{i=1}^{r} (a_i + p^{n_i}\mathbb{Z}_p)$ et pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, Φ soit constante sur $a_i + p^{n_i}\mathbb{Z}_p$.

Grâce à l'inégalité ultramétrique, on peut assurer l'existence de $(i_1, ..., i_s) \in [\![1, r]\!]^s$ tel que $\mathrm{Supp}(\Phi) = \biguplus_{j=1}^{s} (a_{i_j} + p^{n_{i_j}}\mathbb{Z}_p)$ et pour tout $j \in [\![1, s]\!]$, Φ soit constante sur $a_{i_j} + p^{n_{i_j}}\mathbb{Z}_p$, de valeur c_j.

Par conséquent, $\Phi = \sum_{j=1}^{s} c_j \mathbb{1}_{a_{i_j} + p^{n_{i_j}}\mathbb{Z}_p} \in \mathrm{Vect}(\{\mathbb{1}_{a+p^n\mathbb{Z}_p} \mid a \in \mathbb{Q}_p \text{ et } n \in \mathbb{Z}\})$, ce qui établit l'inclusion manquante et achève la démonstration. ❑

Proposition 3.1.2.

$$\forall \Phi \in C_c^\infty(\mathbb{Q}_p),\ \forall y \in \mathbb{Q}_p^\times,\ \int_{\mathbb{Q}_p} \Phi(xy)\, d\mu_{\mathbb{Q}_p}(x) = |y|_p^{-1} \int_{\mathbb{Q}_p} \Phi(x)\, d\mu_{\mathbb{Q}_p}(x).$$

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour les fonctions indicatrices $\mathbb{1}_{a+p^n\mathbb{Z}_p}$, $a \in \mathbb{Q}_p$ et $n \in \mathbb{Z}$. Le résultat général s'en déduira par linéarité de l'intégrale grâce au lemme précédent.

Soient $a \in \mathbb{Q}_p$, $n \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Q}_p^\times$. Tout d'abord,

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{1}_{a+p^n\mathbb{Z}_p}(xy)\, d\mu_{\mathbb{Q}_p}(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{1}_{y^{-1}a+y^{-1}p^n\mathbb{Z}_p}(x)\, d\mu_{\mathbb{Q}_p}(x).$$

Par suite, on observe que $y^{-1}p^n\mathbb{Z}_p = p^{n-\nu_p(y)}\mathbb{Z}_p$. En effet, comme $y \in \mathbb{Q}_p^\times$, il existe $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ tel que $y = p^{\nu_p(y)}u$. Alors $y^{-1} = p^{-\nu_p(y)}u^{-1}$ puis

$$y^{-1}p^n\mathbb{Z}_p = p^{-\nu_p(y)}u^{-1}p^n\mathbb{Z}_p = p^{n-\nu_p(y)}u^{-1}\mathbb{Z}_p = p^{n-\nu_p(y)}\mathbb{Z}_p.$$

D'où

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{1}_{a+p^n\mathbb{Z}_p}(xy)\, d\mu_{\mathbb{Q}_p}(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{1}_{y^{-1}a+p^{n-\nu_p(y)}\mathbb{Z}_p}(x)\, d\mu_{\mathbb{Q}_p}(x) = \mu_{\mathbb{Q}_p}(y^{-1}a + p^{n-\nu_p(y)}\mathbb{Z}_p) = p^{\nu_p(y)-n} = |y|_p^{-1}p^{-n}.$$

D'autre part, on a

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{1}_{a+p^n\mathbb{Z}_p}(x)\, d\mu_{\mathbb{Q}_p}(x) = \mu_{\mathbb{Q}_p}(a + p^n\mathbb{Z}_p) = p^{-n}$$

ce qui établit l'égalité désirée. ❑

Notation 3.1.3. Grâce à la proposition ci-dessus, on peut définir une mesure $\mu_{\mathbb{Q}_p^\times}$ sur $\mathbb{Q}_p^\times$ comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{Q}_p^\times,\ d\mu_{\mathbb{Q}_p^\times}(x) = \frac{d\mu_{\mathbb{Q}_p}(x)}{|x|_p}.$$

Si $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{Q}_p^\times)$, alors la fonction $x \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{Q}_p^\times}(x)\dfrac{\Phi(x)}{|x|_p}$ appartient à $C_c^\infty(\mathbb{Q}_p)$ et on peut donc écrire l'identité suivante.

$$\boxed{\forall \Phi \in C_c^\infty(\mathbb{Q}_p^\times),\ \int_{\mathbb{Q}_p^\times} \Phi(x)\, d\mu_{\mathbb{Q}_p^\times}(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}_p^\times}(x) \frac{\Phi(x)}{|x|_p} d\mu_{\mathbb{Q}_p}(x).}$$

La proposition suivante montre que cette égalité permet de définir une intégrale de Haar sur $\mathbb{Q}_p^\times$.

Proposition 3.1.4. La fonctionnelle $\begin{array}{rccc} I : & C_c^\infty(\mathbb{Q}_p^\times) & \to & \mathbb{C} \\ & \Phi & \mapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}_p^\times}(x) \frac{\Phi(x)}{|x|_p}\, d\mu_{\mathbb{Q}_p}(x) \end{array}$ est une intégrale de Haar à gauche et à droite de $\mathbb{Q}_p^\times$.

Démonstration. Étant donné que $\mathbb{Q}_p^\times$ est abélien, il suffit de vérifier (grâce à l'exemple 1.2.12) que I est une intégrale de Haar à droite de $\mathbb{Q}_p^\times$.

Le point ❷ de la définition 1.2.2 est immédiat. Seule l'invariance par translation à droite de I nécessite quelques détails.

Soient $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{Q}_p^\times)$ et $y \in \mathbb{Q}_p^\times$. On a

$$I(\rho_y \Phi) = \int_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}_p^\times}(x) \frac{\rho_y \Phi(x)}{|x|_p} d\mu_{\mathbb{Q}_p}(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}_p^\times}(x) \frac{\Phi(xy)}{|x|_p} d\mu_{\mathbb{Q}_p}(x).$$

En posant $u = xy$ de sorte que $x = uy^{-1}$ et $d\mu_{\mathbb{Q}_p}(x) = |y|_p^{-1} d\mu_{\mathbb{Q}_p}(u)$, il vient

$$I(\rho_y \Phi) = \int_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}_p^\times}(u) \frac{\Phi(u)}{|u|_p |y|_p^{-1}} |y|_p^{-1} d\mu_{\mathbb{Q}_p}(u) = \int_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}_p^\times}(u) \frac{\Phi(u)}{|u|_p} d\mu_{\mathbb{Q}_p}(u) = I(\Phi).$$

Ceci achève la démonstration. ❑

3.2 Unimodularité de G

Le groupe additif A peut être perçu comme un produit de quatre copies de $\mathbb{Q}_p$. Par conséquent, la mesure de Haar μ_A sur A est obtenue en prenant un produit tensoriel de quatre copies de la mesure de Haar $\mu_{\mathbb{Q}_p}$.

Proposition 3.2.1.

❶ Pour tout $\Phi \in C_c^\infty(G)$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\Phi(x)}{|\det(x)|_p^2} \mathbb{1}_G(x)$ appartient à $C_c^\infty(A)$.

❷ La fonctionnelle $\begin{array}{rccc} I : & C_c^\infty(G) & \to & \mathbb{C} \\ & \Phi & \mapsto & \displaystyle\int_A \frac{\Phi(x)}{|\det(x)|_p^2} \mathbb{1}_G(x)\, d\mu_A(x) \end{array}$ est une intégrale de Haar à gauche et à droite de G.

Démonstration. Le point ❶ est clair. Le cœur de la démonstration consiste à vérifier le point ❷. Pour cela, on va découper la preuve en plusieurs étapes. Soit $g \in G$.

1ère étape. On considère les fonctionnelles suivantes

$$\begin{array}{rccc} I_1 : & C_c^\infty(A) & \to & \mathbb{C} \\ & \Phi & \mapsto & \displaystyle\int_A \Phi(gx)\, d\mu_A(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} I_2 : & C_c^\infty(A) & \to & \mathbb{C} \\ & \Phi & \mapsto & \displaystyle\int_A \Phi(xg)\, d\mu_A(x) \end{array}.$$

Montrons que ces deux fonctionnelles sont des intégrales de Haar à gauche et à droite de A.

• Soit $\Phi \in C_c^\infty(A)$ telle que $\Phi \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on a clairement $I_1(\Phi) \geqslant 0$ et $I_2(\Phi) \geqslant 0$.

• Vérifions l'invariance par translation à gauche de I_1 et I_2. Pour tous $\gamma \in A$ et $\Phi \in C_c^\infty(A)$,

$$\begin{aligned} I_1(\lambda_\gamma \Phi) &= \int_A \lambda_\gamma \Phi(gx)\, d\mu_A(x) = \int_A \Phi(-\gamma + gx)\, d\mu_A(x) \\ &= \int_A \Phi(gx')\, d\mu_A(x') \ \text{(en posant } x' = -g^{-1}\gamma + x) \\ &= I_1(\Phi) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_2(\lambda_\gamma \Phi) &= \int_A \lambda_\gamma \Phi(xg)\, d\mu_A(x) = \int_A \Phi(xg-\gamma)\, d\mu_A(x) \\ &= \int_A \Phi(x'g)\, d\mu_A(x') \ \text{(en posant } x' = x - \gamma g^{-1}) \\ &= I_2(\Phi). \end{aligned}$$

Ceci montre que I_1 et I_2 sont des intégrales de Haar à gauche de A. De manière analogue, on vérifie l'invariance par translation à droite de I_1 et de I_2 et donc I_1 et I_2 sont aussi des intégrales de Haar à droite de A.

2ème étape. Toujours en utilisant des arguments similaires à ce qui précède, on montre également que la fonctionnelle ci-dessous

$$\begin{array}{rccc} J : & C_c^\infty(A) & \to & \mathbb{C} \\ & \Phi & \mapsto & \displaystyle\int_A \Phi(x)\, d\mu_A(x) \end{array}$$

est une intégrale de Haar à gauche et à droite de A. D'après la proposition 1.2.5, il existe $\lambda_1(g) > 0$ et $\lambda_2(g) > 0$ tels que pour tout $\Phi \in C_c^\infty(A)$, $I_1(\Phi) = \lambda_1(g)\, J(\Phi)$ et $I_2(\Phi) = \lambda_2(g)\, J(\Phi)$.

3ème étape. Déterminons $\lambda_1(g)$. Pour cela, prenons $\Phi = \mathbb{1}_{\mathfrak{m}} \in C_c^\infty(A)$ où $\mathfrak{m} = \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_p)$. Posons aussi $\mathfrak{m}' = g^{-1}\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{k} = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}'$. On a

$$\mathfrak{m} = \biguplus_{x+\mathfrak{k} \in \mathfrak{m}/\mathfrak{k}} (x + \mathfrak{k})$$

ce qui fournit pour tout $y \in A$,

$$\mathbb{1}_{\mathfrak{m}}(y) = \sum_{x+\mathfrak{k} \in \mathfrak{m}/\mathfrak{k}} \mathbb{1}_{x+\mathfrak{k}}(y) = \sum_{x+\mathfrak{k} \in \mathfrak{m}/\mathfrak{k}} \mathbb{1}_{\mathfrak{k}}(y-x).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \mu_A(\mathfrak{m}) &= \int_A \mathbb{1}_{\mathfrak{m}}(y)\, d\mu_A(y) = \int_A \left(\sum_{x+\mathfrak{k} \in \mathfrak{m}/\mathfrak{k}} \mathbb{1}_{\mathfrak{k}}(y-x) \right) d\mu_A(y) \\ &= \sum_{x+\mathfrak{k} \in \mathfrak{m}/\mathfrak{k}} \left(\int_A \mathbb{1}_{\mathfrak{k}}(y')\, d\mu_A(y') \right) \ \text{(en posant } y' = y - x) \\ &= \sum_{x+\mathfrak{k} \in \mathfrak{m}/\mathfrak{k}} \mu_A(\mathfrak{k}) = [\mathfrak{m} : \mathfrak{k}]\, \mu_A(\mathfrak{k}). \end{aligned}$$

De même, on montre que $\mu_A(\mathfrak{m}') = [\mathfrak{m}' : \mathfrak{k}]\, \mu_A(\mathfrak{k})$. Ensuite, le quotient $\dfrac{\mu_A(\mathfrak{m})}{\mu_A(\mathfrak{m}')} = \dfrac{[\mathfrak{m} : \mathfrak{k}]}{[\mathfrak{m}' : \mathfrak{k}]}$ ne dépend que de la double classe KgK.

L'égalité $I_1(\mathbb{1}_{\mathfrak{m}}) = \lambda_1(g)\, J(\mathbb{1}_{\mathfrak{m}})$ se réécrit $\mu_A(g^{-1}\mathfrak{m}) = \lambda_1(g)\, \mu_A(\mathfrak{m})$. Mais aussi, on a

$$\mu_A(g^{-1}\mathfrak{m}) = \mu_A(\mathfrak{m}') = \frac{[\mathfrak{m}' : \mathfrak{k}]}{[\mathfrak{m} : \mathfrak{k}]} \mu_A(\mathfrak{m}).$$

Par unicité, il vient $\lambda_1(g) = \dfrac{[\mathfrak{m}' : \mathfrak{k}]}{[\mathfrak{m} : \mathfrak{k}]}$. Comme ce quotient ne dépend que la double classe KgK, on peut supposer que $g = \begin{pmatrix} p^a & 0 \\ 0 & p^b \end{pmatrix}$ où a et b sont des entiers relatifs tels que $a \leqslant b$ (décomposition de Cartan).

4ème étape. On a donc pour tout $\Phi \in C_c^\infty(A)$,

$$\begin{aligned} I_1(\Phi) &= \int_A \Phi(gx)\, d\mu_A(x) = \iiiint_{\mathbb{Q}_p^4} \Phi\left(\begin{pmatrix} p^a & 0 \\ 0 & p^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix} \right) d\mu_{\mathbb{Q}_p}(x_{1,1})\, d\mu_{\mathbb{Q}_p}(x_{1,2})\, d\mu_{\mathbb{Q}_p}(x_{2,1})\, d\mu_{\mathbb{Q}_p}(x_{2,2}) \\ &= \iiiint_{\mathbb{Q}_p^4} \Phi\left(\begin{pmatrix} p^a x_{1,1} & p^a x_{1,2} \\ p^b x_{2,1} & p^b x_{2,2} \end{pmatrix} \right) d\mu_{\mathbb{Q}_p}(x_{1,1})\, d\mu_{\mathbb{Q}_p}(x_{1,2})\, d\mu_{\mathbb{Q}_p}(x_{2,1})\, d\mu_{\mathbb{Q}_p}(x_{2,2}) \\ &= \iiiint_{(\mathbb{Q}_p^\times)^4} \Phi\left(\begin{pmatrix} p^a x_{1,1} & p^a x_{1,2} \\ p^b x_{2,1} & p^b x_{2,2} \end{pmatrix} \right) |x_{1,1}|_p\, |x_{1,2}|_p\, |x_{2,1}|_p\, |x_{2,2}|_p\, d\mu_{\mathbb{Q}_p^\times}(x_{1,1})\, d\mu_{\mathbb{Q}_p^\times}(x_{1,2})\, d\mu_{\mathbb{Q}_p^\times}(x_{2,1})\, d\mu_{\mathbb{Q}_p^\times}(x_{2,2}) \end{aligned}$$

En posant $x'_{1,1} = p^a x_{1,1}$, $x'_{1,2} = p^a x_{1,2}$, $x'_{2,1} = p^b x_{2,1}$ et $x'_{2,2} = p^b x_{2,2}$, on obtient

$$\begin{aligned} I_1(\Phi) &= |p^a p^b|_p^{-2} \iiiint_{(\mathbb{Q}_p^\times)^4} \Phi\left(\begin{pmatrix} x'_{1,1} & x'_{1,2} \\ x'_{2,1} & x'_{2,2} \end{pmatrix}\right) |x'_{1,1}|_p\, |x'_{1,2}|_p\, |x'_{2,1}|_p\, |x'_{2,2}|_p\, d\mu_{\mathbb{Q}_p^\times}(x'_{1,1})\, d\mu_{\mathbb{Q}_p^\times}(x'_{1,2})\, d\mu_{\mathbb{Q}_p^\times}(x'_{2,1})\, d\mu_{\mathbb{Q}_p^\times}(x'_{2,2}) \\ &= |\det(g)|_p^{-2} \iiiint_{\mathbb{Q}_p^4} \Phi\left(\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix}\right) d\mu_{\mathbb{Q}_p}(x_{1,1})\, d\mu_{\mathbb{Q}_p}(x_{1,2})\, d\mu_{\mathbb{Q}_p}(x_{2,1})\, d\mu_{\mathbb{Q}_p}(x_{2,2}) \\ &= |\det(g)|_p^{-2} \int_A \Phi(x)\, d\mu_A(x) = |\det(g)|_p^{-2} J(\Phi). \end{aligned}$$

Ceci impose alors que $\lambda_1(g) = |\det(g)|_p^{-2}$. De même, on montre que pour tout $\Phi \in C_c^\infty(A)$, $I_2(\Phi) = |\det(g)|_p^{-2} J(\Phi)$ et donc $\lambda_2(g) = |\det(g)|_p^{-2}$. Pour tout $\Phi \in C_c^\infty(A)$, on obtient ainsi

$$J(\rho_g \Phi) = I_2(\Phi) = |\det(g)|_p^{-2} J(\Phi)$$

5ème étape. Pour tout $\Phi \in C_c^\infty(G)$, le travail effectué précédemment permet d'affirmer que

$$\begin{aligned} I(\rho_g \Phi) &= \int_A \frac{\Phi(xg)}{|\det(x)|_p^2} \mathbb{1}_G(x)\, d\mu_A(x) = |\det(g)|_p^2 \int_A \frac{\Phi(xg)}{|\det(xg)|_p^2} \mathbb{1}_G(x)\, d\mu_A(x) \\ &= |\det(g)|_p^2 \int_A \frac{\Phi(xg)}{|\det(xg)|_p^2} \mathbb{1}_G(xg)\, d\mu_A(x) = |\det(g)|_p^2\, J\left(\rho_g\left(\frac{\Phi \mathbb{1}_G}{|\det(\cdot)|_p^2}\right)\right) \\ &= |\det(g)|_p^2 |\det(g)|_p^{-2} J\left(\frac{\Phi \mathbb{1}_G}{|\det(\cdot)|_p^2}\right) = J\left(\frac{\Phi \mathbb{1}_G}{|\det(\cdot)|_p^2}\right) = I(\Phi) \end{aligned}$$

et de manière analogue, on montre que $I(\lambda_g \Phi) = I(\Phi)$, ce qui clôture la démonstration. ❏

Immédiatement en découle le résultat suivant.

Corollaire 3.2.2. Le groupe G est unimodulaire.

3.3 Examen de l'unimodularité de B, N, T et Z

Concernant le cas des sous-groupes N, T et Z de G, tout est beaucoup plus simple.

Proposition 3.3.1. Les groupes N, T et Z sont unimodulaires.

Démonstration. On a $N \simeq \mathbb{Q}_p$, $T \simeq \mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times$ et $Z \simeq \mathbb{Q}_p^\times$. Comme $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{Q}_p^\times$ sont abéliens, il en est de même pour N, Z et T. On conclut en appliquant l'exemple 1.2.12. ❏

En revanche, le sous-groupe de Borel B de G va se comporter différemment du point de vue de l'unimodularité. Étant donné que $B \simeq N \rtimes T$ (proposition 2.1.1), on peut introduire une fonctionnelle I sur l'espace $C_c^\infty(B) \simeq C_c^\infty(T) \otimes C_c^\infty(N)$ comme suit :

$$\begin{array}{rccc} I : & C_c^\infty(B) & \to & \mathbb{C} \\ & \Phi & \mapsto & \displaystyle\int_T \int_N \Phi(tn)\, d\mu_N(n)\, d\mu_T(t) \end{array}$$

où μ_N et μ_T sont des mesures de Haar sur N et T respectivement. Ceci donne lieu à la proposition suivante.

Proposition 3.3.2. La fonctionnelle I introduite ci-dessus est une intégrale de Haar à gauche de B.

Démonstration. Si Φ est un élément de $C_c^\infty(B)$ tel que $\Phi \geqslant 0$, alors par positivité de l'intégrale, on a immédiatement $I(\Phi) \geqslant 0$. L'objectif est de vérifier l'invariance de I par translation à gauche par B.

Soient $b \in B$ et $\Phi \in C_c^\infty(B)$. Écrivons $b = tn$ où $t \in T$ et $n \in N$. Il vient

$$\begin{aligned} I(\lambda_b \Phi) &= \int_T \int_N \lambda_b \Phi(t'n')\, d\mu_N(n')\, d\mu_T(t') = \int_T \int_N \Phi(b^{-1}t'n')\, d\mu_N(n')\, d\mu_T(t') \\ &= \int_T \int_N \Phi(n^{-1}t^{-1}t'n')\, d\mu_N(n')\, d\mu_T(t') = \int_T \int_N \Phi(t^{-1}t'((t'^{-1}t)n^{-1}(t^{-1}t'))n')\, d\mu_N(n')\, d\mu_T(t') \\ &= \int_T \int_N \Phi(t''n'')\, d\mu_N(n'')\, d\mu_T(t'') \ \text{(en posant } t'' = t^{-1}t' \text{ et } n'' = (t'^{-1}t)n^{-1}(t^{-1}t')n') \\ &= I(\Phi). \end{aligned}$$

Ceci prouve que la fonctionnelle I est une intégrale de Haar à gauche de B. ❏

Remarque 3.3.3. La proposition 3.3.2 permet alors de justifier pour tout $\Phi \in C_c^\infty(B)$ l'écriture :

$$\int_B \Phi(b)\, d\mu_B(b) = \int_T \int_N \Phi(tn)\, d\mu_N(n)\, d\mu_T(t).$$

On peut penser la mesure μ_B comme étant la mesure produit $\mu_T \otimes \mu_N$, mais les deux facteurs ne commutent pas, ce qui permet d'intuiter la non-unimodularité du groupe B. La proposition 3.3.4 apporte davantage de précisions.

Proposition 3.3.4. Le caractère modulaire de B est défini par :

$$\forall b = tn = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} n \in B = TN,\ \delta_B(b) = \left|\frac{t_2}{t_1}\right|_p .$$

Démonstration. Soit $c \in B$. Comme $B = TN$, il existe $s \in T$ et $m \in N$ tels que $c = sm$. Écrivons de plus $s = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}$ où s_1 et s_2 sont deux éléments de $\mathbb{Q}_p^\times$.

Soit Φ un élément de $C_c^\infty(B)$. Commençons par écrire que

$$\int_B \Phi(bc)\, d\mu_B(b) = \int_T \int_N \Phi(tnsm)\, d\mu_N(n)\, d\mu_T(t) = \int_T \int_N \Phi(ts(s^{-1}ns)m)\, d\mu_N(n)\, d\mu_T(t). \qquad (*)$$

Fixons t dans T. Comme $N \trianglelefteq B$ et que N est abélien, on a

$$\begin{aligned}\int_N \Phi(ts(s^{-1}ns)m)\, d\mu_N(n) &= \int_N \Phi(tsm(s^{-1}ns))\, d\mu_N(n) = \int_N \Phi(tss^{-1}(sms^{-1}n)s)\, d\mu_N(n) \\ &= \int_N \Phi(tss^{-1}n's)\, d\mu_N(n') \text{ (en posant } n' = sms^{-1}n).\end{aligned}$$

Pour tout $n \in N$, si on écrit $n = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $q \in \mathbb{Q}_p$, alors on a

$$s^{-1}ns = \begin{pmatrix} s_1^{-1} & 0 \\ 0 & s_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{s_2}{s_1}q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_N \Phi(ts(s^{-1}ns)m)\, d\mu_N(n) &= \int_{\mathbb{Q}_p} \Phi\left(ts\begin{pmatrix} 1 & \frac{s_2}{s_1}q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) d\mu_{\mathbb{Q}_p}(q) = \int_{\mathbb{Q}_p^\times} |q|_p \Phi\left(ts\begin{pmatrix} 1 & \frac{s_2}{s_1}q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) d\mu_{\mathbb{Q}_p^\times}(q) \\ &= \left|\frac{s_1}{s_2}\right|_p \int_{\mathbb{Q}_p^\times} \left|\frac{s_2}{s_1}q\right|_p \Phi\left(ts\begin{pmatrix} 1 & \frac{s_2}{s_1}q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) d\mu_{\mathbb{Q}_p^\times}(q) \\ &= \left|\frac{s_1}{s_2}\right|_p \int_{\mathbb{Q}_p^\times} |q'|_p \Phi\left(ts\begin{pmatrix} 1 & q' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) d\mu_{\mathbb{Q}_p^\times}(q') \text{ (en posant } q' = \frac{s_2}{s_1}q) \\ &= \left|\frac{s_1}{s_2}\right|_p \int_{\mathbb{Q}_p} \Phi\left(ts\begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) d\mu_{\mathbb{Q}_p}(q) = \left|\frac{s_1}{s_2}\right|_p \int_N \Phi(tsn)\, d\mu_N(n).\end{aligned}$$

Par conséquent, en reprenant l'égalité $(*)$,

$$\begin{aligned}\int_B \Phi(bc)\, d\mu_B(b) &= \left|\frac{s_1}{s_2}\right|_p \int_T \int_N \Phi(tsn)\, d\mu_N(n)\, d\mu_T(t) \\ &= \left|\frac{s_1}{s_2}\right|_p \int_T \int_N \Phi(t'n)\, d\mu_N(n)\, d\mu_T(t') \text{ (en posant } t' = ts) \\ &= \left|\frac{s_1}{s_2}\right|_p \int_B \Phi(b)\, d\mu_B(b).\end{aligned}$$

Or, par définition du caractère modulaire δ_B, on a aussi

$$\int_B \Phi(bc)\, d\mu_B(b) = \delta_B(c)^{-1} \int_B \Phi(b)\, d\mu_B(b).$$

Par unicité, on en déduit l'égalité $\delta_B(c) = \left|\frac{s_2}{s_1}\right|_p$. ❑

Remarque 3.3.5. Par conséquent, le groupe B n'est pas unimodulaire en vertu de la proposition 1.2.11.

Références

[BH] Colin J. Bushnell, Guy Henniart. *The Local Langlands Conjecture for GL(2)*. Springer, 2006.

[GH1] Dorian Goldfeld, Joseph Hundley. *Automorphic Representations and L-functions for the General Linear Group Volume I*. Cambridge University Press, 2011.

[Str] Benoît Stroh. *Représentations des groupes compacts*. https://webusers.imj-prg.fr/~benoit.stroh/PolyCompact.pdf. 2014.